Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области «Университет «Дубна» (государственный университет «Дубна»)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
_____________ / А.С. Деникин
«_____»________2021 г.

ПРОГРАММА

ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМУ ПРЕДМЕТУ

«МАТЕМАТИКА»

г. Дубна, 2021г.

Павлешвили Михаил Петрович
Павл 12.05.2021.

Программа вступительных испытаний по математике

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части экзамена. При подготовке к экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

I. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.

11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар, сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.
19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

II. Содержание теоретической части экзамена

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.

2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;
2. сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

5. изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
7. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
10. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

11. давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;
12. анализировать формулировки утверждений и их доказательства;
13. решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Модуль действительного числа

По определению:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \phantom{\text{если }} a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля действительного числа:

$$|-a| = |a|,\ |a|^2 = a^2,\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ |a+b| \leq |a| + |b|,\ |a-b| \geq |a| - |b|.$$

Свойства неравенств:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a, \end{cases} \qquad |x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{array}\right.$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \in N, n \neq 1.$$

2.2. Свойства степеней

Арифметическим корнем степени $n \in N$ $(n > 1)$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$. Обозначается $\sqrt[n]{a} = b$.

По определению.

Пусть $a > 0$, тогда

$$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in N;\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ m,\ n \in N,\ n \neq 1.$$

Свойства арифметических корней.

Пусть $a \geq 0, b > 0,\ n \in N,\ n \neq 1, m \in N,\ m \neq 1$, тогда

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Свойства действительных степеней.

Пусть $a > 0,\ b > 0$, тогда

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\ \left(a^x\right)^y = a^{xy},\ a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

$$x \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{x^2 \cdot b}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2 \cdot b}, & x < 0. \end{cases}$$

2.3. Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b),$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2\ \mu\ ab + b^2).$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}),\ n \in N.$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab,\quad a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab.$$

2.4. Рациональные уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0;\ a,\ b,\ c$ - действительные числа, вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Теорема Виета.

Сумма корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\dfrac{b}{a}$, а произведение $\dfrac{c}{a}$, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$$

Разложение на множители.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2.5. Логарифмы

Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число b. Обозначается $x=\log_a b$.

По определению.

$$\log_a 1=0, \qquad \log_a a=1.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b}=b, \qquad \log_a a^b=b.$$

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a x_1x_2=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|, x_1x_2>0,$

2. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2}=\log|x_1|-\log_a|x_2|,\ \dfrac{x_1}{x_2}>0,$

3. $\log_a x^p=p\log_a x, x>0,\ (\log_a x^2=2\log_a|x|, x\neq 0),$

4. $\log_{a^p} b=\dfrac{1}{p}\log_a b,$

5. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a},$

6. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c>0, c\neq 1.$

2.6. Прогрессии

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это число называется разностью прогрессии и обозначается d.

По определению.

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1)d,\ k \in N,\ k > 1.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Признак арифметической прогрессии.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2},\ k \in N,\ k > 1.$$

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое число, отличное от нуля. Это число называется знаменателем прогрессии и обозначается q.

По определению.

$$b_k = b_{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1},\ k \in N,\ k > 1.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии.

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1 \quad (\text{при } q = 1,\ S_n = b_1 n).$$

Признак геометрической прогрессии.

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1},\ k = 2, 3, 4, \ldots$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad S \text{ – сумма прогрессии, } |q| < 1,\ n \to \infty.$$

2.7. Тригонометрия

Функции одного и того же угла:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

5. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

6. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

7. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

Формулы сложения:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \; \mu \; \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \; \mu \; \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

Формулы двойных, половинных, тройных углов:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

4. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

5. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Преобразование суммы функций в произведение:

1. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

2. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

4. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Преобразование произведений функций:

1. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$.

2. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$.

3. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$.

Понижение степени:

1. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$. 2. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

3. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

Значение тригонометрических функций некоторых углов.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	–	0	–

Простейшие тригонометрические уравнения.

1. $\sin x = a,\ |a|\le 1,\quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\quad n\in Z;$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\quad \arcsin a \in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

2. $\cos x = a,\ |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z;$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad \arccos x \in [0, \pi].$$

3. $\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi l, \quad l \in Z,$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

4. $\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arcctg} a + \pi m, \quad m \in Z;$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad \operatorname{arctg} a \in (0, \pi).$$

<u>Частные случаи</u>:

$$\left.\begin{matrix} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z, \qquad \left.\begin{matrix} \cos x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \qquad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \qquad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2.8. Планиметрия

Пусть:

S – площадь,

a, b, c – стороны треугольника,

α, β, γ – противоположные углы,

p – полупериметр,

R – радиус описанной окружности,

r – радиус вписанной окружности,

h_a – высота, проведенная к стороне a,

m_a – медиана, проведенная к стороне a.

<u>Треугольник.</u>

а) ***Медианы*** треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

б) ***Биссектрисы*** пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

в) ***Средняя линия*** треугольника параллельна третьей стороне и длина ее равна половине длины третьей стороны.

г) ***Теорема синусов***

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

д) ***Теорема косинусов***

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

е) ***Площадь***

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\qquad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,\qquad S=rp,$$

$$S=\frac{abc}{4R},\qquad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ж) ***Площадь*** равностороннего треугольника

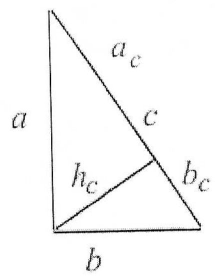
$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Прямоугольный треугольник:

а) ***Теорема Пифагора*** $c^2=a^2+b^2$.

б) $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, $R=\dfrac{c}{2}$.

в) $a^2=ca_c$, $b^2=cb_c$, $h_c^2=a_cb_c$



Выпуклый четырехугольник:

а) $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$,

где d_1, d_2 – диагонали четырехугольника, φ – угол между ними.

б) Вокруг выпуклого четырехугольника можно ***описать*** окружность тогда и только тогда, когда сумма любых двух его противоположных углов равна 180°.

в) В выпуклый четырехугольник можно ***вписать*** окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Ромб.

$$S = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

Параллелограмм.

а) $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$, где a и b стороны параллелограмма, d_1 и d_2 – его диагонали.

б) $S = ab \sin\alpha = ah_a = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Сектор.

а) $l = r\alpha$, где l – длина дуги сектора, α – радианная мера центрального угла.

б) $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

Трапеция.

а) $l = \frac{a+b}{2}$, где l – средняя линия трапеции.

б) $S = \frac{a+b}{2} h$.

Теоремы о произведениях отрезков секущих:

а) Если из точки S вне окружности проведена касательная ST (T – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $SA \cdot SB = ST^2$.

б) Если две прямые, проходящие через точку S, пересекают окружность в точках A и B, C и D соответственно, то $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

2.9. Стереометрия

Пусть:

l – боковое ребро,

P – периметр основания,

H – высота,

V – объем,

S – площадь основания,

$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности.

Призма.

$$V = SH, \qquad S_{бок} = P_{сеч} \cdot l,$$

где $P_{сеч}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру l.

Параллелепипед (прямоугольный).

$$V = abc, \qquad S_{бок} = P \cdot H, \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где d – диагональ параллелепипеда.

Пирамида.

а) $V = \frac{1}{3}SH$.

б) Если в пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

в) Если в пирамиде все боковые грани образуют с основанием равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

г) Правильная пирамида.

$$S_{бок} = \frac{1}{2}Ph_a,$$

где h_a – апофема (высота боковой грани).

Усеченная пирамида.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_a,$$

где P_1, P_2 – периметры оснований.

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

где S_1 и S_2 – площади оснований пирамиды.

Цилиндр.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH, \qquad V = \pi R^2 H,$$

где R – радиус основания.

Конус.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \qquad S_{\text{бок}} = \pi RL,$$

где L – образующая.

Усеченный конус.

$$S_{\text{бок}} = \pi(R_1 + R_2)L,$$

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, нижнего и верхнего соответственно.

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Шар.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2,$$

где R – радиус шара.

3. РЕШЕНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

1. Найти 40% от числа: $3\frac{1}{8}+\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6$.

Решение. Выполним вычисления по действиям.

1) $2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=\frac{11}{5}-\frac{3}{4}=\frac{11\cdot 4-3\cdot 5}{20}=\frac{44-15}{20}=\frac{29}{20}$.

2) $\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6=\frac{29}{20}:\frac{16}{10}=\frac{29}{20}\cdot\frac{10}{16}=\frac{29}{32}$.

3) $3\frac{1}{8}+\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6=\frac{25}{8}+\frac{29}{32}=\frac{25\cdot 4+29}{32}=\frac{129}{32}$.

Чтобы найти 40% от числа $\frac{129}{32}$ составим и решим пропорцию:

$\begin{array}{l}\frac{129}{32}-100\%\\ x\ -40\%\end{array}$, откуда $x=\frac{129\cdot 40}{32\cdot 100}=\frac{129}{80}=1\frac{49}{80}$. **Ответ:** $1\frac{49}{80}$.

2. Вычислить без таблиц и калькулятора:

$$\frac{\lg 75-\frac{1}{2}\lg 9}{\lg 125}\cdot\log_{16}\left(3^{\log_{1/3}(1/4)}\right)\cdot\left(5^{-1}+16^{3/4}\right).$$

Решение. Выполним вычисления по действиям.

1) $\frac{\lg 75-\frac{1}{2}\lg 9}{\lg 125}=\frac{\lg 75-\lg 9^{1/2}}{\lg 125}=\frac{\lg 75-\lg 3}{\lg 125}=\frac{\lg(75/3)}{\lg 125}=\frac{\lg 5^2}{\lg 5^3}=\frac{2\lg 5}{3\lg 5}=\frac{2}{3}$.

2) $\log_{16}\left(3^{\log_{1/3}(1/4)}\right)=\log_{16}\left(3^{\log_3 4}\right)=\log_{16}4=\frac{1}{2}$.

3) $5^{-1}+16^{3/4}=\frac{1}{5}+\left(\sqrt[4]{16}\right)^3=\frac{1}{5}+8=\frac{41}{5}$.

Окончательно имеем: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{41}{5}=\frac{41}{15}$. **Ответ:** $\frac{41}{15}$.

Были использованы основные свойства логарифмов:

1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|,\ x_1 x_2 > 0,$

2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log|x_1| - \log_a |x_2|,\ \dfrac{x_1}{x_2} > 0,$

3) $\log_a x^p = p \log_a x,\ x > 0,$ 4) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b,$

5) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},$ 6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c > 0, c \neq 1.$

3. Упростить выражение: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right).$

Решение.

$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \left(\frac{3 + \sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}\right) : \left(\frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right) =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \frac{\left(3 + \sqrt{1-a^2}\right) \cdot \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a} \cdot \left(3 + \sqrt{1-a^2}\right)} = \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}} = \sqrt{1-a}.$$

Была использована формула сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

4. Доказать тождество: $\dfrac{a - 16/25}{\sqrt{a} - 0{,}8} - \dfrac{a\sqrt{a} - 64/125}{a + 0{,}8\sqrt{a} + 16/25} = 1{,}6.$

Решение. Преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{a - 16/25}{\sqrt{a} - 0{,}8} - \frac{a\sqrt{a} - 64/125}{a + 0{,}8\sqrt{a} + 16/25} = \frac{\left(a^{1/2}\right)^2 - (4/5)^2}{a^{1/2} - 4/5} -$$

$$- \frac{\left(a^{1/2}\right)^3 - (4/5)^3}{\left(a^{1/2}\right)^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2} = \frac{(a^{1/2} - 4/5)(a^{1/2} + 4/5)}{a^{1/2} - 4/5} -$$

$$- \frac{(a^{1/2} - 4/5) \cdot ((a^{1/2})^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2)}{(a^{1/2})^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2} = a^{1/2} + 4/5 -$$

$$-(a^{1/2}-4/5)=a^{1/2}+4/5-a^{1/2}+4/5=8/5=1{,}6.$$

Левая часть равна правой части. Тождество доказано.

Были использованы формулы сокращенного умножения:

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, 2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

5. Решить уравнение: $\sqrt{2x+10}-1=x$.

Решение. ОДЗ: $2x+10>0$, $x>-5$.

Исходное уравнение равносильно уравнению: $\sqrt{2x+10}=x+1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат. При этом могут появиться посторонние корни, удовлетворяющие ОДЗ, поэтому необходима проверка. $2x+10=(x+1)^2$, $2x+10=x^2+2x+1$, $x^2=9$, откуда

$$x_1=-3, x_2=3.$$

Оба полученных корня удовлетворяют ОДЗ.

Проверка:

1) при $x=-3$ получаем $\sqrt{2\cdot(-3)+10}=-3+1$, $\sqrt{4}=-2$, $2=-2$ (неверно), следовательно $x=-3$ посторонний корень,

2) при $x=3$ получаем $\sqrt{2\cdot 3+10}=3+1$, $\sqrt{16}=4$, $4=4$ (верно), $x=3$ корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

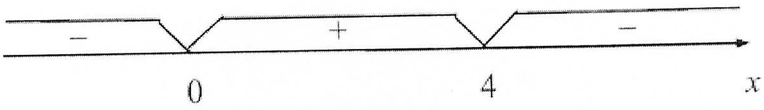
6. Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}<\frac{9}{4}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$.

Исходное неравенство равносильно неравенству: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Так как основание $\frac{2}{3}<1$, то функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^t$ является убывающей, при переходе к показателям степени знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $\frac{4}{x}-3>-2$, $\frac{4}{x}-1>0$, $\frac{4-x}{x}>0$.

Получили дробно-рациональное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого найдем корни числителя и знаменателя $x_1=0, x_2=4$. Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1=0, x_2=4$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $0<x<4$.

Ответ: $0<x<4$.

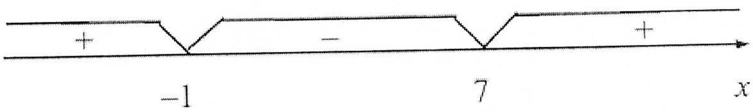
7. Решить неравенство: $(4/3)^{6x+10-x^2}<64/27$.

Решение. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$.

Исходное неравенство равносильно: $(4/3)^{6x+10-x^2}<(4/3)^3$.

Так как основание 4/3 > 1 функция $y=(4/3)^t$ является возрастающей, при переходе к показателям степени знак неравенства не меняется, т.е. $6x+10-x^2<3$, $x^2-6x-7>0$. Получили квадратное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого находим корни левой части неравенства по теореме Виета: $x_1+x_2=6$, $x_1\cdot x_2=7$, откуда $x_1=-1$, $x_2=7$.

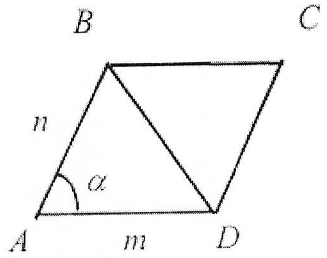
Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1=-1$, $x_2=7$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $x<-1$, $x>7$.

Ответ: $x<-1$, $x>7$.

8. Стороны параллелограмма равны m и n, угол между ними α. Найти площадь параллелограмма и меньшую диагональ.



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм,

$AB = n,\ AD = m,\ \angle A = \alpha$.

Найти: S_{ABCD}, BD.

Решение.

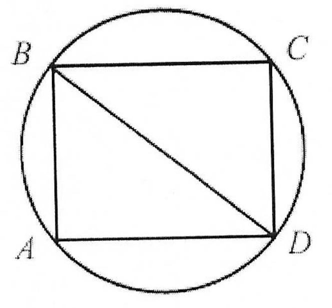
$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = n \cdot m \cdot \sin\alpha$

Диагональ BD находим из ΔABD по теореме косинусов

$$BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = n \cdot m \cdot \sin\alpha$, $\quad BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos\alpha}$.

9. Найти площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см.



Дано:

$ABCD$ – прямоугольник,

$AB = 3$ см, $AD = 4$ см.

Найти: $S_{кр}$.

Решение.

Диагональ прямоугольника является диметром описанной окружности. По теореме Пифагора находим:

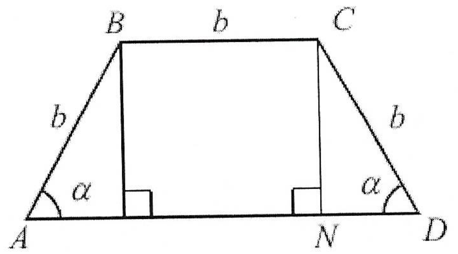
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2},\ BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле: $S_{кр} = \pi R^2$.

Таким образом $S_{кр} = \pi 5^2 = 25\pi$.

Ответ: $S_{кр} = 25\pi$ см^2.

10. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне b, острый угол равен α. Найти площадь трапеции.



Дано:

$ABCD$ – трапеция,

$AD \| BC$,

$AB = BC = CD = b$,

$\angle A = \angle D = \alpha$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{1}{2}(AD + b)BH$, где $BH \perp AD$, BH – высота.

Найдем BH и AD.

Рассмотрим ΔABH – прямоугольный.

$\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$, откуда $BH = AB\sin\alpha = b\sin\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$, откуда $AH = AB\cos\alpha = b\cos\alpha$.

$\Delta ABH = \Delta CND$ $\left(\angle AHB = \angle CND = 90°, \quad AB = CD, \quad \angle A = \angle D\right)$.

Отсюда следует, что $AH = ND$, поэтому $ND = b \cdot \cos\alpha$.

$AD = AH + HN + ND = b\cos\alpha + HN + b\cos\alpha = HN + 2b\cos\alpha$,

$HN = BC = b$ (так как $HBCN$ – прямоугольник).

$$AD = b + 2b\cos\alpha = b(1 + 2\cos\alpha).$$

Подставляем полученные выражения в формулу для площади:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(b(1 + 2\cos\alpha) + b)b\sin\alpha = \frac{1}{2}(2b + 2b\cos\alpha)b\sin\alpha =$$

$$= (b + b\cos\alpha)b\sin\alpha = b^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

Ответ: $S_{ABCD} = b^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$.

11. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 6 и 15. Высота пирамиды, равная 4, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано:

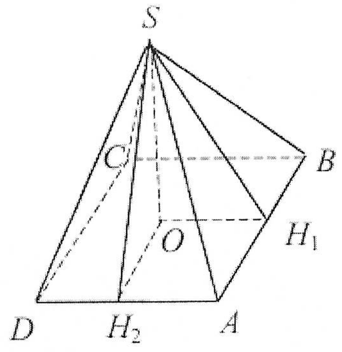
$SABCD$ - пирамида,

$ABCD$ - прямоугольник,

$AB=6$, $AD=15$,

SO – высота пирамиды,

$SO=4$.



Найти: $S_{бок}$.

Решение.

$$S_{бок}=2S_{\Delta ABS}+2S_{\Delta ADS}.$$

Рассмотрим ΔSOH_1, где SH_1 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_1=\sqrt{SO^2+OH_1^2}=\sqrt{4^2+(15/2)^2}=\sqrt{289/4}=17/2=8{,}5.$$

Рассмотрим ΔSOH_2, где SH_2 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_2=\sqrt{SO^2+OH_2^2}=\sqrt{4^2+(6/2)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

$$S_{бок}=2(AB\cdot SH_1/2+AD\cdot SH_2/2)=AB\cdot SH_1+AD\cdot SH_2=6\cdot 8{,}5+15\cdot 5=$$

$$=51+75=126.$$

Ответ: $S_{бок}=126$.

12. Определить площадь боковой поверхности прямой призмы, боковое ребро которой равно b и составляет с диагональю большей боковой грани угол α. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом β.

Дано:

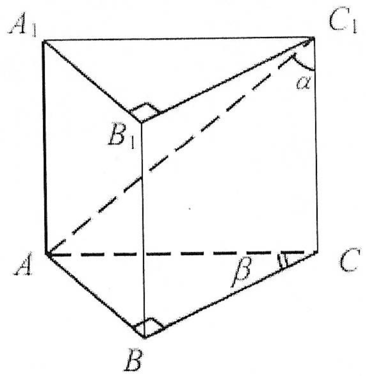
$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма,

$CC_1=b$,

$\angle AC_1C=\alpha$,

$\angle ABC=90^0$,

$\angle ACB=\beta$.



Найти: $S_{бок}$.

Решение.

$$S_{бок}=P_{осн}\,h=(AB+BC+AC)CC_1=(AB+BC+AC)b.$$

Найдем стороны треугольника ABC.

Рассмотрим ΔAC_1C – прямоугольный $\left(\angle C_1CA = 90^0\right)$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{CC_1}, \text{ откуда } AC = CC_1 \operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha.$$

Рассмотрим ΔABC - прямоугольный $\left(\angle ABC = 90^o\right)$.

$\sin\beta = \dfrac{AB}{AC}$, откуда $AB = AC\sin\beta = b\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$.

$\cos\beta = \dfrac{BC}{AC}$, откуда $BC = AC\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha\cos\beta$.

Подставим найденные выражения в формулу для площади боковой поверхности.

$S_{бок} = (b\operatorname{tg}\alpha\sin\beta + b\operatorname{tg}\alpha\cos\beta + b\operatorname{tg}\alpha)b = b^2\operatorname{tg}\alpha(\sin\beta + \cos\beta + 1)$.

Ответ: $S_{бок} = b^2\operatorname{tg}\alpha(\sin\beta + \cos\beta + 1)$.

13. Решить уравнение $6\cos^2 7x - 7\sin 7x - 1 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

$$6(1-\sin^2 7x) - 7\sin 7x - 1 = 0, \quad 6 - 6\sin^2 7x - 7\sin 7x - 1 = 0,$$

$$-6\sin^2 7x - 7\sin 7x + 5 = 0, \quad 6\sin^2 7x + 7\sin 7x - 5 = 0.$$

Пусть $\sin 7x = t$, тогда $6t^2 + 7t - 5 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 6\cdot(-5)}}{12} = \frac{-7\pm 13}{12}, \quad \text{откуда } t_1 = -\frac{5}{3},\ t_2 = \frac{1}{2}.$$

1) $\sin 7x = -\dfrac{5}{3}$ уравнение не имеет решений, так как $|\sin 7x| \le 1$ для любого $x \in R$.

2) $\sin 7x = \dfrac{1}{2}$, $7x = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + n\pi$, $7x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$,

$x = (-1)^n \dfrac{\pi}{42} + n\dfrac{\pi}{7}, \quad n \in Z$. **Ответ:** $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{42} + n\dfrac{\pi}{7}, \quad n \in Z$.