

Государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования Московской области  
«Университет «Дубна»  
(государственный университет «Дубна»)

Институт системного анализа и управления  
Кафедра информационных технологий



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе

/ Деникин А.С. /

06 20 21 г.

## Рабочая программа дисциплины

### Компьютерная алгебра

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Направленность (профиль) программы (специализация)

Математическое моделирование

Форма обучения


очная

Дубна, 2021

Преподаватель:

к.ф.-м.н., доцент Ершов Н.М.

кафедра информационных технологий


  
подпись

Рабочая программа разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки высшего образования **01.03.02 Прикладная математика и информатика**

Программа рассмотрена на заседании кафедры **информационных технологий**

Протокол заседания № 12 от «11» июня 2021 г.

Заведующий кафедрой к.ф.-м.н. доцент Токарева Н.А.

  
подпись

СОГЛАСОВАНО

Заведующий выпускающей кафедрой распределённых информационно-вычислительных систем Кореньков В.В.

  
подпись

Эксперт (рецензент):

Помощник директора лаборатории информационных технологий имени М.Г. Мещерякова Объединенного института ядерных исследований по международному сотрудничеству и работе с кадрами, к.ф.-м.н., с.н.с., Айрян Э.А.

  
подпись  


## Содержание

1	Цели и задачи освоения дисциплины	4
2	Место дисциплины в структуре ОПОП ВО	4
3	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)	5
4	Объем дисциплины (модуля)	6
5	Содержание дисциплины (модуля)	7
6	Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)	8
7	Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)	8
8	Ресурсное обеспечение	9
	Приложение. Фонд оценочных средств	12

## **1. Цели и задачи освоения дисциплины**

Цель изучения дисциплины «Компьютерная алгебра» соотносится с общими целями образовательной программы по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, в рамках которой преподаётся дисциплина – познакомить студентов с первоначальными понятиями компьютерной алгебры; дать необходимый теоретический аппарат и развить навыки использования системы компьютерной алгебры SymPy.

Основными задачами изучения дисциплины являются: знакомство с первоначальными понятиями и алгоритмами компьютерной алгебры; освоение основных приёмов работы с системой компьютерной алгебры SymPy; развитие первоначальных навыков практического использования системы SymPy для решения математических задач и оперирования с алгоритмическими и программными методами символьных вычислений в дальнейшей учебной и профессиональной деятельности.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП**

Дисциплина «Компьютерная алгебра» относится к обязательной части образовательной программы по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Дисциплины, усвоение которых студентами необходимо для изучения дисциплины:

- математический анализ;
- линейная алгебра и аналитическая геометрия;
- структуры и алгоритмы обработки данных;
- математическая логика и теория алгоритмов.

Дисциплина преподаётся в 5 семестре, на 3 курсе. Форма промежуточной аттестации – зачет.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Формируемые компетенции (код и наименование)	Индикаторы достижения компетенций (код и формулировка)	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1. Использует существующие математические методы для разработки моделей непрерывных и дискретных объектов при решении прикладных задач	Знать теоретические основы для разработки моделей непрерывных и дискретных объектов в области профессиональной деятельности
		Уметь применять основные приемы, современные методы и программные системы математического моделирования при решении прикладных задач
		Владеть современными вычислительными средствами для обработки, визуализации и анализа результатов исследований в профессиональной деятельности
	ОПК-2.2. Использует и адаптирует существующие математические методы для создания инструментальных средств и системы программирования с целью решения задач в области профессиональных интересов	Владеть навыками использования современного прикладного программного обеспечения при исследовании математических моделей
	ОПК-2.3. Использует системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Знать существующие системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
		Уметь разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения прикладных задач, используя существующие системы программирования и программные комплексы
		Владеть навыками применения системы программирования на базе математических моделей для реализации алгоритмов решения прикладных задач
ОПК-5. Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения	ОПК-5.1. Формализует и предлагает алгоритмическое решение поставленной задачи.	Знать методы формализации задач, базовые алгоритмы, пригодные для практического применения
		Уметь формализовать задачи, составлять алгоритмы, пригодные для практического применения
	ОПК-5.2. Разрабатывает программы, пригодные для практического применения.	Знать основные языки программирования, операционные системы и оболочки, современные среды разработки программного обеспечения
		Уметь составлять алгоритмы, писать и отлаживать коды на языке программирования, тестировать работоспособность программы, интегрировать программные модули
		Владеть языком программирования, методами отладки и тестирования работоспособности программы

#### **4. Объем дисциплины**

Объем дисциплины составляет 2 зачётные единицы, всего 72 академических часа.

## 5. Содержание дисциплины

### Очная форма обучения

Наименование разделов и тем дисциплины	Всего (академ. часы)	в том числе:						Самостоятельная работа обучающегося
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем)						
		Лекции	Практические (семинарские) занятия	Лабораторные занятия	КРП	...	Всего	
3 семестр / 2 курс								
Арифметические операции и функции		4	8				12	5
Основные алгебраические структуры, операции и символьные вычисления		4	10				14	6
Точные и приближённые вычисления		4	8				12	5
Многочлены, кривые и операции над ними		4	8				12	6
Промежуточная аттестация: зачёт		X						
Итого за семестр / курс	72	16	34				50	22
в т.ч. с применением ДОТ, ЭО								

## Содержание дисциплины

№	Содержание раздела
Раздел 1	Арифметические операции. Целые числа, НОД, алгоритм Евклида, рациональные, вещественные и комплексные числа.
Раздел 2	Булева алгебра. Булевы переменные, функции и многочлены. Бинарные отношения и операции. Свойства бинарных отношений и операций, классы эквивалентности их представители и операции с классами. Специальные свойства бинарных отношений. Фактор-множества. Группы и кольца. Группы и их свойства. Кольца и поля, их типы, расширения колец.
Раздел 3	Основные арифметические операции в системе SymPy. Точная и приближенная арифметика в системе SymPy, алгебраические и комплексные числа, приближенные вычисления с заданной точностью. Приближенное вычисление корней многочленов высоких степеней. Нахождение нулей функций с помощью SymPy, метод Ньютона.
Раздел 4	Алгебра многочленов: многочлены, как трансцендентные расширения кольца их коэффициентов, основные операции с многочленами, задание многочленов и алгебраических операций над ними, упрощение. Полиномиальные операции в SymPy: выделение коэффициентов многочлена, НОД и его вычисление, факторизация.

При реализации дисциплины организуется практическая подготовка путем проведения практических занятий, предусматривающих участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью (34 часа).

Практическая подготовка при изучении дисциплины реализуется непосредственно в университете.

### 6. Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине

Для обеспечения реализации программы дисциплины (модуля) разработаны:

- методические материалы к практическим (семинарским) занятиям;
- методические материалы по организации самостоятельной работы обучающихся;
- методические материалы по организации изучения дисциплины (модуля) с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий;
- методические рекомендации для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов по освоению программы дисциплины (модуля).

Методические материалы по дисциплине (модулю) и образовательной программе в целом представлены на официальном сайте образовательной организации (раздел «Сведения об образовательной организации» – Образование – Образовательные программы).

### 7. Фонды оценочных средств по дисциплине

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям образовательной программы по дисциплине (модулю) разработаны фонды оценочных средств, позволяющие оценить результаты обучения (знания, умения, навыки) и сформированные (формируемые) компетенции. Эти фонды включают теоретические вопросы, типовые практические задания, контрольные работы, домашние работы, расчетно-графические задания, тесты и критерии их оценивания и иные оценочные материалы, используемые при проведении процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации. Фонды оценочных средств представлены в приложении к рабочей программе.



При необходимости обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья и инвалиды обеспечиваются оценочными материалами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

*Для лиц с нарушениями зрения:*

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля.

*Для лиц с нарушениями слуха:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

*Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

## **8. Ресурсное обеспечение**

### **Перечень литературы**

#### *Основная литература*

1. Панкратьев Е. В. Элементы компьютерной алгебры: учебное пособие / Панкратьев Евгений Васильевич. - М.: Бином. Лаборатория знаний: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2014. - 247 с.: ил. - (Основы информатики и математики). - Лит.:с.243.-Предм.указ.:с.245. - ISBN 9785947746556
2. Царев А. В. Элементы абстрактной и компьютерной алгебры :[Электронный ресурс] : учебное пособие / Царев Андрей Валерьевич, Шеина Галина Валентиновна. - М.: МПГУ, 2016. - 116 с.: ил. - ISBN 978-5-4263-0393-5.
3. Тарасевич Ю. Ю. Использование пакетов SymPy, Mathcad и LateX2e при решении математических задач и подготовке математических и естественнонаучных текстов: Информационные технологии в математике: учебное пособие для вузов / Тарасевич Юрий Юрьевич. - 3-е изд. - М.: Либроком, 2018. - 136 с. - Прил.:с.111.-Лит.:с.131. - ISBN 9785397062183.

#### *Дополнительная литература*

- Тан К. Ш. Символьный C++: Введение в компьютерную алгебру с использованием объектно-ориентированного программирования / Тан Киат Ши, Стиб Вилли-Ханс, Харди Йорик; перевод с английского В. И. Ахмолина, С. В. Чудова под редакцией Г. М. Кобелькова. - 2-е англ.изд.,расш.и пересмотр. - М.: Мир, 2001. - 622 с.: ил. - Список лит.:с.612.-Предм.указ.:с.615. - ISBN 1-85233-260-3.
- Акритас А. Г. Основы компьютерной алгебры с приложениями / Акритас Алкивиадис Г.; ведущий редактор Г. М. Цукерман; перевод с английского Е. В. Панкратьева. - М.: Мир, 1994. - 544 с.: ил. - ISBN 5-03-002016-0.

### **Профессиональные базы данных и информационные справочные системы**

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»: [www.bibloclub.ru](http://www.bibloclub.ru)
2. Электронно-библиотечная система «ЮРАЙТ» <https://biblio-online.ru>
3. Научная электронная библиотека (НЭБ): <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
4. Электронно-библиотечная система «Znanium» <http://znanium.com/>

5. БД российских журналов East View : <http://dlib.eastview.com>
6. Базы данных компании EBSCO Publishing: <http://search.ebscohost.com/>
7. БД российских научных журналов на Elibrary.ru (РУНЭБ): <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
8. <http://www.scopus.com/home.url>
9. Web of Science [webofknowledge.com](http://www.webofknowledge.com)
10. Профессиональные ресурсы сети «Интернет»
11. Сообщество аналитиков: <http://www.uml2.ru/>.
12. Материалы IT-портала Центра информационных технологий <http://www.citforum.ru>.

### **Необходимое программное обеспечение**

Используется лицензионное программное обеспечение:

- Adobe Acrobat Reader
- Браузер Google Chrome.

### **Необходимое материально-техническое обеспечение**

Для проведения лекционных занятий требуется специализированная аудитория, оснащенная компьютером, проектором, электронной доской.

Для проведения практических занятий требуется специализированный компьютерный класс, подключенный к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья могут использовать специализированное программное и материально-техническое обеспечение:

- обучающиеся с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости могут использовать адаптивные технические средства: функцию «сенсорная клавиатура», «управление указателем мыши с клавиатуры», специально оборудованные джойстики, увеличенные выносные кнопки, клавиатуры с большими клавишами или накладки «Клавита»;

- обучающиеся с ограничениями по зрению могут прослушать доступный аудиоматериал или прочитать тексты, увеличив шрифт на экране монитора компьютера. Рекомендуются использовать экранную лупу и другие визуальные вспомогательные средства, чтобы изменить шрифт текста, межстрочный интервал, синхронизацию с речью и т.д., программы экранного доступа (скринридеры для прочтения текстовой информации через синтезированную речь) и/или включить функцию «экранного диктора» на персональном компьютере с операционной системой Windows 7, 8, 10, Vista, XP. Студенты с полным отсутствием зрения могут использовать тексты, напечатанные шрифтом Брайля, а для набора текста на компьютере – клавиатуры Брайля;

- обучающиеся с ограничениями по слуху могут воспользоваться индивидуальными техническими средствами (аппараты «Глобус», «Монолог», индивидуальными слуховыми аппаратами, компьютерной аудиогарнитурой, наушниками и др.) при прослушивании необходимой информации, а также услугами сурдопереводчика.

При необходимости обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья и инвалиды обеспечиваются печатными и (или) электронными образовательными ресурсами (образовательная программа, учебники, учебные пособия и др.) в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

*Для лиц с нарушениями зрения:*

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме на языке Брайля.

*Для лиц с нарушениями слуха:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

*Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

**Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)**

**Компьютерная алгебра**

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Уровень высшего образования

бакалавриат

Направленность (профиль) программы

Математическое моделирование

Форма(ы) обучения

очная

Дубна, 2021

**Перечень компетенций выпускников образовательной программы с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

Полный перечень компетенций выпускников образовательной программы 01.03.02 Прикладная математика и информатика с указанием результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования приведен в картах компетенций образовательной программы.

Перечень компетенций выпускников образовательной программы 01.03.02 Прикладная математика и информатика, в формировании которых участвует данная дисциплина представлен в разделе 3 рабочей программы дисциплины.

Указание результатов обучения (знаний, умений, владений), характеризующих этапы формирования компетенций, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования представлено ниже.

**Описание шкал оценивания**

Критерии оценивания ответов студентов на зачете:

Оценка «отлично»	Студент показывает не только высокий уровень теоретических знаний по изучаемой дисциплине, но и видит междисциплинарные связи. Умеет анализировать практические ситуации. Ответ построен логично. Материал излагается четко, ясно, аргументировано. Уместно используется информационный и иллюстративный материал.
Оценка «хорошо»	Студент показывает достаточный уровень теоретических и практических знаний, свободно оперирует категориальным аппаратом. Умеет анализировать практические ситуации, но допускает некоторые погрешности. Ответ построен логично, материал излагается грамотно.
Оценка «удовлетворительно»	Студент показывает знание основного лекционного и практического материала. В ответе не всегда присутствует логика изложения. Студент испытывает затруднения при приведении практических примеров.
Оценка «неудовлетворительно»	Студент показывает слабый уровень теоретических знаний, не может привести примеры из реальной практики. Неуверенно и логически непоследовательно излагает материал. Неправильно отвечает на дополнительные вопросы или затрудняется с ответом на них.

Описание шкал оценивания для различных заданий, выполняемых в рамках текущего контроля, представлено в методических материалах, определяющих процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

## Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине, характеризующих этапы формирования компетенций

**ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач**

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)	КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) ШКАЛА оценивания					ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ
	1	2	3	4	5	
Знает теоретические основы для разработки моделей непрерывных и дискретных объектов в области профессиональной деятельности	Отсутствие знаний	Слабое, фрагментарное знание. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное знание. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы знание. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание. Не допускает ошибок.	<i>Устное собеседование</i>
Умеет применять основные приемы, современные методы и программные системы математического моделирования при решении прикладных задач	Отсутствие знаний	Слабое, фрагментарное знание. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное знание. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы знание. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание. Не допускает ошибок.	<i>Устное собеседование</i>
Владеет современными вычислительными средствами для обработки, визуализации и анализа результатов исследований в профессиональной деятельности	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>

Владеет навыками использования современного прикладного программного обеспечения при исследовании математических моделей	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>
Знает существующие системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Отсутствие знаний	Слабое, фрагментарное знание. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное знание. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы знание. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание. Не допускает ошибок.	<i>Устное собеседование</i>
Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения прикладных задач, используя существующие системы программирования и программные комплексы	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>
Владеет навыками применения системы программирования на базе математических моделей для реализации алгоритмов решения прикладных задач	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>

**ОПК-5. Способен разрабатывать алгоритмы и компьютерные программы, пригодные для практического применения**

<b>РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю)</b>	<b>КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ по дисциплине (модулю) ШКАЛА оценивания</b>					<b>ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ</b>
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	
Знает методы формализации задач, базовые алгоритмы, пригодные для практического применения	Отсутствие знаний	Слабое, фрагментарное знание. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное знание. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы знание. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание. Не допускает ошибок.	<i>Устное собеседование</i>
Умеет формализовать задачи, составлять алгоритмы, пригодные для практического применения	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>
Знает основные языки программирования, операционные системы и оболочки, современные среды разработки программного обеспечения	Отсутствие знаний	Слабое, фрагментарное знание. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное знание. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы знание. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание. Не допускает ошибок.	<i>Устное собеседование</i>
Умеет составлять алгоритмы, писать и отлаживать коды на языке программирования, тестировать работоспособность программы, интегрировать программные модули	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>



Владеет языком программирования, методами отладки и тестирования работоспособности программы	Отсутствие умений	Слабое, фрагментарное умение. Допускает множественные грубые ошибки.	В целом успешное, но не структурированное умение. Допускает достаточно серьезные ошибки.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение. Допускает отдельные негрубые ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное умение. Не допускает ошибок.	<i>Выполнение простого практического контрольного задания</i>
--	-------------------	--	--	--	--	---

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций и (или) для итогового контроля сформированности компетенции**

**Перечень вопросов к зачету**

<b>№</b>	<b>Вопрос</b>	<b>Индикаторы достижения компетенции</b>	<b>Результаты обучения</b>
1	Делимость в кольце целых чисел. Свойства операции деления. Доказательство бесконечности множества простых чисел.	И(ОПК-2)-1	Знает теоретические основы для разработки моделей непрерывных и дискретных объектов в области профессиональной деятельности
2	НОД целых чисел. Доказательство представимости НОД в форме Безу.	И(ОПК-2)-1	Умеет применять основные приемы, современные методы и программные системы математического моделирования при решении прикладных задач
3	Алгоритм Евклида вычисления НОД. Доказательство его корректности и завершаемости.	И(ОПК-2)-1	Владеет современными вычислительными средствами для обработки, визуализации и анализа результатов исследований в профессиональной деятельности
4	Бинарные отношения на множестве, примеры.	И(ОПК-2)-2	Владеет навыками использования современного прикладного программного обеспечения при исследовании математических моделей
5	Специальные свойства бинарных отношений, примеры. Фактор-множества.	И(ОПК-2)-3	Знает существующие системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
6	Бинарные операции и их свойства, примеры.	И(ОПК-2)-3	Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения прикладных задач, используя существующие системы программирования и программные комплексы
7	Булева алгебра и ее свойства. Булевы формулы и их представимость в виде многочленов.	И(ОПК-2)-3	Владеет навыками применения системы программирования на базе математических моделей для реализации алгоритмов решения прикладных задач
8	Полугруппы и группы, примеры.	И(ОПК-5)-1	Знает методы формализации задач, базовые алгоритмы, пригодные для практического применения
9	Кольца и типы колец, примеры.	И(ОПК-5)-1	Умеет формализовать задачи, составлять алгоритмы, пригодные для практического применения

10	Подкольцо и расширение кольца, примеры.	И(ОПК-5)-2	Знает основные языки программирования, операционные системы и оболочки, современные среды разработки программного обеспечения
11	Простое и трансцендентное расширение. Многочлены.	И(ОПК-5)-2	Умеет составлять алгоритмы, писать и отлаживать коды на языке программирования, тестировать работоспособность программы, интегрировать программные модули
12	Задание функций.	И(ОПК-5)-2	Владеет языком программирования, методами отладки и тестирования работоспособности программы

### Материалы для текущего контроля

Формы текущего контроля: контроль посещаемости, домашние работы.

*Примерные темы домашних заданий*

№	Вопрос	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения
Д1	Делимость в кольце целых чисел. Свойства операции деления. Доказательство бесконечности множества простых чисел.	И(ОПК-2)-1	Знает теоретические основы для разработки моделей непрерывных и дискретных объектов в области профессиональной деятельности
Д2	НОД целых чисел. Доказательство представимости НОД в форме Безу.	И(ОПК-2)-1	Умеет применять основные приемы, современные методы и программные системы математического моделирования при решении прикладных задач
Д3	Алгоритм Евклида вычисления НОД. Доказательство его корректности и завершаемости.	И(ОПК-2)-1	Владеет современными вычислительными средствами для обработки, визуализации и анализа результатов исследований в профессиональной деятельности
Д4	Бинарные отношения на множестве, примеры.	И(ОПК-2)-2	Владеет навыками использования современного прикладного программного обеспечения при исследовании математических моделей
Д5	Специальные свойства бинарных отношений, примеры. Фактор-множества.	И(ОПК-2)-3	Знает существующие системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач
Д6	Бинарные операции и их свойства, примеры.	И(ОПК-2)-3	Умеет разрабатывать и реализовывать алгоритмы решения прикладных задач, используя существующие системы программирования и программные комплексы
Д7	Булева алгебра и ее свойства. Булевы формулы и их представимость в виде многочленов.	И(ОПК-2)-3	Владеет навыками применения системы программирования на базе математических моделей для реализации алгоритмов решения прикладных задач
Д8	Полугруппы и группы, примеры.	И(ОПК-5)-1	Знает методы формализации задач, базовые алгоритмы, пригодные для практического применения
Д9	Кольца и типы колец, примеры.	И(ОПК-5)-1	Умеет формализовать задачи, составлять алгоритмы, пригодные для практического применения

Д10	Подкольцо и расширение кольца, примеры.	И(ОПК-5)-2	Знает основные языки программирования, операционные системы и оболочки, современные среды разработки программного обеспечения
Д11	Простое и трансцендентное расширение. Многочлены.	И(ОПК-5)-2	Умеет составлять алгоритмы, писать и отлаживать коды на языке программирования, тестировать работоспособность программы, интегрировать программные модули
Д12	Задание функций.	И(ОПК-5)-2	Владеет языком программирования, методами отладки и тестирования работоспособности программы

**Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Для контроля знаний студентов по данной дисциплине необходимо проводить текущий и промежуточный контроль. Текущий контроль выполняется в виде приема допусков и защит практических и индивидуальных работ, устного опроса на практических занятиях. Промежуточный контроль проводится в виде зачета, на котором обсуждаются теоретические вопросы курса. Практическая часть зачитывается по результатам работ, выполненным в семестре, на основе балльно-рейтинговой системы. При рейтинговой системе все знания, умения и навыки, приобретаемые студентами в результате изучения дисциплины, оцениваются в баллах.

Предполагается пять форм контроля, по которым студенты получают баллы:

- Посещаемость лекций (макс. 5 баллов).
- Посещаемость семинаров (макс. 5 баллов).
- Выполнение домашних заданий к каждой лекции (макс. 30 баллов).
- Выполнение практических заданий на семинарах (макс. 40 баллов).
- Зачёт (макс. 20 баллов).

Для получения зачёта студенту необходимо набрать 80 баллов.

Результаты работы студентов фиксируются преподавателем в журнале успеваемости.

## Методические указания к практическим занятиям

### Практическое занятие 1. Интерфейс пользователя системы SymPy

[Вызов браузера справки осуществляется командой](#)

```
> ?help
```

либо переходом к разделу Help в контекстном меню (в верхней части рабочего листа или документа).

[Загрузка библиотечного пакета \(показана на примере пакета LinearAlgebra\)](#)

[производится командой](#)

```
> with(LineraAlgebra) :
```

### Практическое занятие 2. Задание функций в системе SymPy

Для задания функций в SymPy можно использовать математический символ стрелки. Покажем это на примере. Для задания функции

$$f(x) = 3x \cos(x^2)$$

можно использовать следующую команду

```
> f:=x->3*x*cos(x^2) ;
```

$$x \rightarrow 3x \cos(x^2)$$

```
> f(1) ;
```

$$3 \cos(1)$$

При этом система SymPy всегда (по умолчанию, если не заданы специальные инструкции) работает с математическими выражениями точно. А чтобы вычислить значение функции приближенно можно использовать встроенную evalf или же задать аргумент в виде числа с плавающей запятой (например 1. или 1.0).

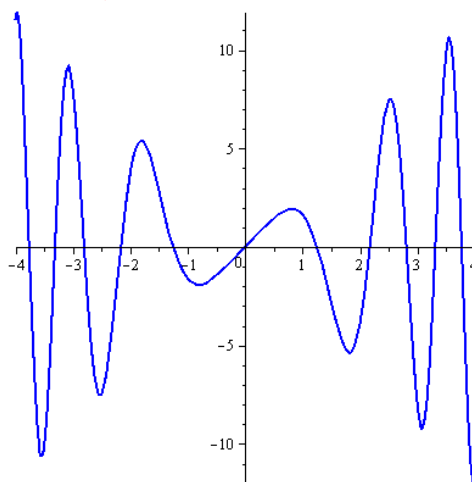
```
> evalf(f(1)) ;
```

$$1.620906918$$

### Практическое занятие 3. Исследование функций и построение графиков в SymPy

Пусть нас интересует поведение функции на интервале  $[-4, 4]$ , и мы хотим найти точки пересечения ее графика с осью  $x$  (нули функции) и найти также значения ее локальных минимумов и максимумов на данном интервале. Сначала построим график функции, определенной выше, с помощью команды

```
> plot(f(x), x=-4..4, color=blue, thickness=2) ;
```



Чтобы вычислить значение нуля функции в интервале  $[1, 1.5]$  можно вызвать команду

```
> fsolve(f(x)=0, x=1..1.5) ;
```

$$1.253314137$$

### Практическое занятие 4. Вычисление производных. Команды SymPy для нахождения уравнений касательных и нормалей к кривой в заданной точке

Чтобы найти производную удобно использовать оператор дифференцирования D

```
> f1:=D(f) ;
```

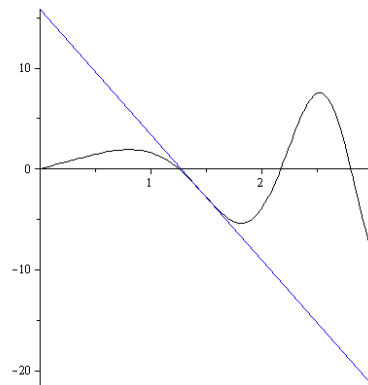
$$x \rightarrow 3 \cos(x^2) - 6 x^2 \sin(x^2)$$

Построим теперь касательную к графику заданной функции в точке  $x=1.474661327$ . Для этого зададим уравнение касательной в виде функции

```
> Tline:=x->f(1.474661327)+f1(1.474661327)*(x-1.474661327) ;
```

и построим функцию и касательную на одном графике

```
> plot([f(x),Tline(x)],x=0..3) ;
```



#### Практическое занятие 5. Пример числовых операций: вычисление римановых сумм

Зададим функцию и интервал  $[a,b]$

```
> f:=x->evalf(x^2+1) ;
```

$$x \rightarrow evalf(x^2 + 1)$$

```
> a:=0: b:=1:
```

Программа для вычисления (по правилу левых прямоугольников на элементарном интервале  $\Delta x=(b-a)/10$ ) римановой суммы имеет вид:

```
> N:=10:
> dX:=(b-a)/N:
> X:=a: Y:=f(X): s:=0:
> for i from 1 to N do
>   s:= s+Y*dX;
>   X:= X+dX; Y:=f(X) ;
> end do:
```

Эта программы выдает значение для  $s$ :

```
> s;
```

1.285000000

#### Практическое занятие 6. Целая и рациональная арифметика в SymPy

SymPy позволяет пользователю работать со всеми известными типами числовых систем.

Например, введем два целых числа  $a, b$

```
> a := 1100005423; b := 1100000077;
```

$a := 1100005423$

$b := 1100000077$

Наибольший общий делитель  $a, b$  равен

```
> igcd(a, b);
```



```

частное
> iquo(a, b);
11

остаток
> irem(a, b);
1

> igcdex(a,b,u,v):
5346

коэффициенты Безу
> u;
33539097

> v;
-33539260

> u*a+v*b;
11

```

**Практическое занятие 7.** Решение нелинейных уравнений методом Ньютона с реализацией в виде процедуры языка SymPy

Зададим функцию

```
> f:=x->sin(x)-x*cos(x);
```

$$x \rightarrow \sin(x) - x \cos(x)$$

и шаг Ньютоновской итерации, как функцию от  $x$

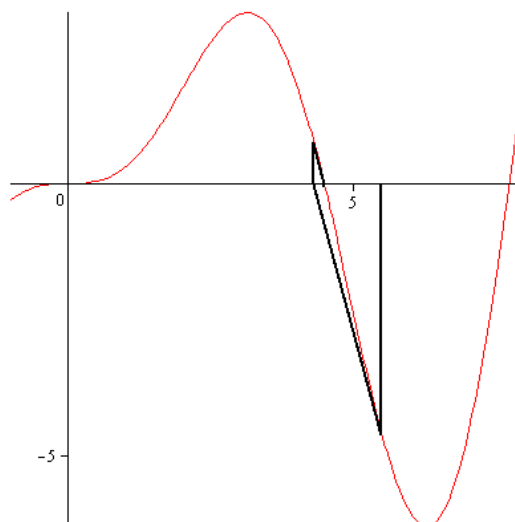
```
> T:=x->x-f(x)/D(f)(x);
```

$$x \rightarrow x - \frac{f(x)}{D(f)(x)}$$

Тогда, для начального значения аргумента

```
> x0:=5.5:
```

итерационный процесс будет иметь вид



и сходиться к значению, приближенно равному 4.503.

**Практическое занятие 8.** Внутреннее представление математических выражений в SymPy

Основные объекты в SymPy - это выражения. Любое выражение состоит из последовательности операндов. Рассмотрим выражение, являющееся уравнением (равенством)

```
> expr1:=y-1/y=1+x^2+sin(x);
```

$$y - \frac{1}{y} = 1 + x^2 + \sin(x)$$

Команда

```
> op(1,expr1),op(2,expr1);
```

$$y - \frac{1}{y}, 1 + x^2 + \sin(x)$$

выделяет левую и правую часть выражения, а булева функция

```
> type(expr1,equation);
```

*true*

подтверждает, что тип выражения. Каждое выражение в SymPy имеет внутреннее представление в виде дерева, называемого деревом выражения.

## Практическое занятие 9. Списки, как структуры данных в SymPy

В компьютерной алгебре важным типом данных являются списки. Они являются очень удобным объектом для представления наборов математических выражений. В SymPy списки создаются с помощью квадратных скобок. Например,

Список натуральных целых

```
> [1,2,3,4,5];
```

$[1, 2, 3, 4, 5]$

Список мономов (степеней переменной)

```
> [1,x,x^2,x^3,x^4];
```

$[1, x, x^2, x^3, x^4]$

Список символов (переменных)

```
> [u,v,w];
```

$[u, v, w]$

Список из двух символьных подсписков

```
> [[a,b],[c,d]];
```

$[[a, b], [c, d]]$

Список математических выражений

```
> [exp(x),sin(x)-x^2,y^3-x*y];
```

$[e^x, \sin(x) - x^2, y^3 - xy]$

## Практическое занятие 10. Использование списков для задания точек, отрезков прямых и векторов в SymPy.

Точку  $P = (x, y)$  на плоскости в SymPy можно представить списком  $[x, y]$ . В математике точка  $P$  отождествляется с вектором (радиус-вектором)  $OP$  проведенным из начала координат в точку  $P$ . В SymPy список  $[x, y]$  можно представить себе как вектор и использовать это представления для выполнения операций над векторами: сложение, вычитание и умножение на число. Если же мы хотим изобразить вектор  $[x, y]$  графически, мы должны попросить SymPy нарисовать его как отрезок, соединяющий точку  $[0, 0]$  с точкой  $[x, y]$ .

Проиллюстрируем сказанное примерами

```
> 2*[3,5];
```

$[6, 10]$

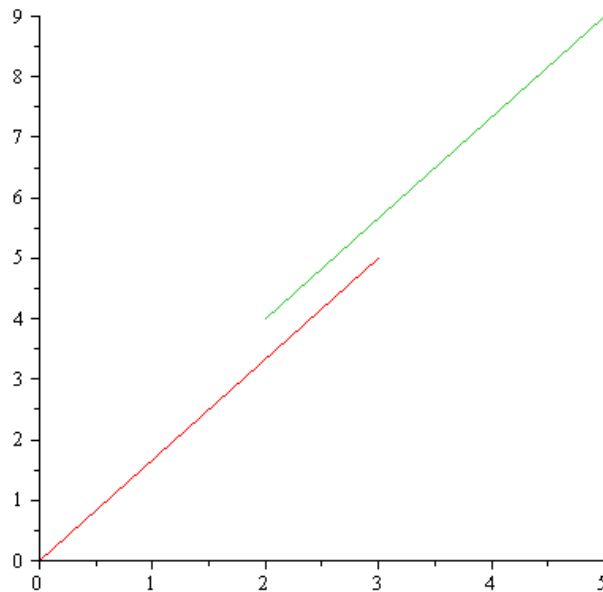
```
> [3,5]+[2,9];
```

$[5, 14]$

```
> 2*[3,5]-6*[1,1];
```

[0, 4]

```
> plot([[0,0],[3,5]],[[2,4],[5,9]]);
```



### Практическое занятие 11. Дифференцирование функций, заданных уравнением от двух переменных

Пусть функция  $y(x)$  определена неявным образом, как решение уравнения  $f(x,y)=0$  и нам требуется вычислить производную функции  $y(x)$ . Для этой цели SymPy имеет специальную встроенную команду `implicitdiff(f(x,y),y,x)`. Покажем на примере, как использовать эту команду.

Зададим функцию двух переменных

```
> H:=(x,y)->x^2/4+y^2-1;
```

$$H := (x, y) \rightarrow \frac{1}{4} x^2 + y^2 - 1$$

и выполним команду

```
> implicitdiff(H(x,y),y,x);
```

$$-\frac{1}{4} \frac{x}{y}$$

Теперь, преобразуем последнее выражение в функцию SymPy

```
> H1:=unapply(-x/(4*y),(x,y));
```

$$H1 := (x, y) \rightarrow -\frac{1}{4} \frac{x}{y}$$

### Практическое занятие 12. Алгебраические кривые, заданные неявно. Их графическое построение и получение уравнений касательных к ним

Пусть теперь кривая задана неявно, как множество точек плоскости удовлетворяющая уравнению  $H(x,y)=0$ , где  $H$ -функция, рассмотренная выше. Пусть нас интересуют две точки кривой с  $x=1$ . Чтобы найти ординаты этих точек мы должны решить уравнение  $H(1,y)=0$  относительно  $y$ :

```
> fsolve(H(1,y)=0);
```

$$-0.8660254038, 0.8660254038$$

Чтобы найти наклоны касательных в точках с  $x=1$  надо определить значения функции  $H1$  в точках  $(1, -0.8660254038)$  и  $(1, 0.8660254038)$

```
> H1(1,-.8660254038);
```

$$0.2886751345$$

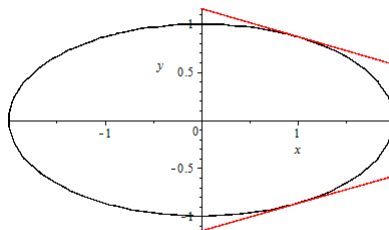
```
> H1(1,.8660254038);
```

$$-0.2886751345$$

Следовательно, уравнения касательных задаются функциями

```
> Tline1:=x->-.8660254038+(.2886751345)*(x-1) :
> Tline2:=x->.8660254038+(-.2886751345)*(x-1) :
```

После этого, стандартными графическими средствами системы SymPy построим график



### Практическое занятие 13. Рекурсивное и дистрибутивное представление многочленов в SymPy

Дистрибутивная форма многочлена – это когда все скобки раскрыты и приведены подобные члены. В такой форме представление многочлена является единственным с точностью до перестановки слагаемых. Поэтому дистрибутивная форма называется канонической. Если многочлен задан не в каноническом дистрибутивном виде, то его преобразование в такой вид производится командой `expand`, например

```
> p:=(x^2+y+5)*(x*y+2)+(x+3*y-1)*(x-1) ;
p := (x2 + y + 5) (x y + 2) + (x + 3 y - 1) (x - 1)
> expand(p) ;
x3 y + x y2 + 3 x2 + 8 x y - 2 x - y + 11
```

Рекурсивная форма многочлена от двух переменных – это представление его как многочлена от одной из этих переменных с коэффициентами, являющимися многочленами от другой переменной. Переход к этой форме производится командой `collect`

```
> p:=1-x-2*x^3-2*x^5-2*x^7-2*x^9;
p := 1 - x - 2 x3 - 2 x5 - 2 x7 - 2 x9
> collect(p,x) ;
x3 y + 3 x2 + ((y + 5) y + 3 y - 2) x - y + 11
> collect(p,y) ;
x y2 + ((x2 + 5) x - 1 + 3 x) y + 2 x2 + 10 + (x - 1)2
```

### Практическое занятие 14. Наибольший общий делитель двух многочленов и его вычисление в SymPy

Наибольший общий делитель (НОД) многочленов  $p$  и  $q$  – это многочлен  $d$  наибольшей полной степени, который делит каждый из многочленов  $p, q$ . НОД в SymPy вычисляется командой `gcd`.

```
> p:=x^3-y^3;
p := x3 - y3
> q:=x^2-y^2;
q := x2 - y2
> gcd(p,q) ;
-y + x
```

Для многочленов от одной переменной  $p(x)$ ,  $q(x)$  в SymPy имеется встроенная функция `gcdex`, реализующая расширенный алгоритм Евклида, которая вычисляет не только  $d(x)$  - НОД, но и разложение Безу для  $d(x)$ , т.е. многочлены  $u(x)$  и  $v(x)$ , такие что  $d=up+uq$

```
> p:=x^3-1
                                      $p := x^3 - 1$ 
> q:=x^2-1;
                                      $q := x^2 - 1$ 
> gcdex(p,q,x,u,v);
                                      $-1 + x$ 
> u;
                                      $1$ 
> v;
                                      $-x$ 
```

#### Практическое занятие 15. Разложение многочленов на множители

Для этой важной операции в SymPy имеется команда `factor`, действие которой мы проиллюстрируем на примере

```
> p:=x^5-15*x^4+85*x^3-225*x^2+274*x-120;
                                      $p := x^5 - 15 x^4 + 85 x^3 - 225 x^2 + 274 x - 120$ 
> factor(p);
                                      $(x - 1) (x - 2) (x - 3) (x - 4) (x - 5)$ 
> expand(p);
                                      $x^5 - 15 x^4 + 85 x^3 - 225 x^2 + 274 x - 120$ 
```

#### Практическое занятие 16. Выделение коэффициентов многочлена

Рассмотрим эту процедуру на примере. Пусть задан многочлен  $p(x,y,z)$  от трех переменных  $x,y,z$

```
> p:=x^2*y*z+2*x*y^2-5*x*z+10*z^3-y^2*z-3*x+6;
                                      $p := x^2 y z + 2 x y^2 - y^2 z + 10 z^3 - 5 x z - 3 x + 6$ 
```

Чтобы выделить все коэффициенты данного многочлена, применяется команда

```
> coeffs(p);
                                      $1, 2, -1, 10, -5, -3, 6$ 
```

Можно также выделить коэффициенты многочлена  $p$ , рассматриваемого как многочлен от  $x$  и последовательность входящих в него степеней  $x$  (мономов)

```
> coeffs(p,x,'a');
                                      $y z, 2 y^2 - 5 z - 3, -y^2 z + 10 z^3 + 6$ 
> a;
                                      $x^2, x, 1$ 
```

Аналогично можно выделить коэффициенты многочлена  $p$  относительно переменных  $y,z$ , либо относительно пары переменных

```
> coeffs(p,[x,y]);
                                      $z, 2, -5 z - 3, -z, 10 z^3 + 6$ 
```

### Практическое занятие 17. Приближенное вычисление корней многочленов высоких степеней

Проще всего это делается с помощью команды `factor`, первым элементом которой является исходный многочлен, а вторым – опция `complex`. Отметим, что это работает только для многочленов от одной переменной.

Пример:

```
> factor(x^6+2*x^4+5*x^2-2*x+1, complex);  
      (x + 0.900672670710200 + 1.21334045363547 I) (x  
      + 0.900672670710200 - 1.21334045363547 I) (x  
      - 0.218495764823999 + 0.393388389567726 I) (x  
      - 0.218495764823999 - 0.393388389567726 I) (x  
      - 0.682176905886201 + 1.30283057550080 I) (x  
      - 0.682176905886201 - 1.30283057550080 I)
```